CEVAP ANAHTARI

Adı-Soyadı: 06.04.2018

Numarası:

Fen – Edb. Fak. Mat. Bölümü Diferansiyel Geometri II Arasınav Soruları

1. $\alpha(t)$, başlangıç noktasından geçmeyen bir parametrik eğri olsun. α eğrisinin üzerinde, başlangıç noktasına en yakın olan nokta $\alpha(t_0)$ ise ve $\alpha'(t_0)\neq 0$ ise, $\alpha(t_0)$ konum vektörünün $\alpha'(t_0)$ vektörüne dik olduğunu gösteriniz?

2. $\alpha : I\subset\mathbb{R}\to E^3$

   $t\to\alpha(t)=(3\sin t,3\cos t,4t)$ ile tanımlanan eğrinin Frenet elemenalarını bulunuz.

3. $\alpha : I\subset\mathbb{R}\to E^3$

   $t\to\alpha(t)=(f(t),g(t),0)$, $f,g\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ile verilen eğirinin $\alpha(t)$ noktasındaki oskülatör, normal ve rektifiyan düzlemlerini bulunuz.

4. $\alpha(t)=(3t^2,3t,2t^3)$ regüler eğrisinin teğet doğrularının $x=0,\ y=z$ doğrusuyla yaptığı açının sabit olduğunu gösteriniz.

5. $\alpha(t)=(e^t,\sin t,\ln(1-t))$ eğrisinin $t=0$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

6. $\alpha(t)=(\cosh t,\sinh t,t)$ ile verilen eğrinin parametre değişim fonksiyonunu bulup yay parametresi cinsinden yeniden ifade ediniz.

7. $\alpha : I=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to E^3$

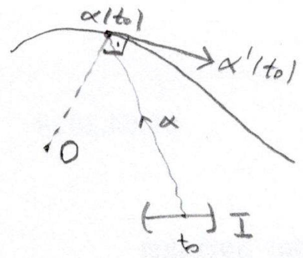
   $t\to\alpha(t)=(2\cos^2 t,\sin 2t,2\sin t)$ eğrisi verilsin. Bu eğri hangi iki yüzeyin arakesitinden oluşmaktadır, bulunuz.

8. $s\in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha : I\to E^3$ eğrisinin eğriliğinin $\kappa=\|\alpha''(s)\|$ olduğunu gösteriniz.

NOT: 1. soru zorunlu olup diğerlerinden istediğiniz 6 soru cevaplandırınız.
Her soru 15 puandır.

Başarılar

Prof. Dr. Emin KASAP

1- 

Hipoteze göre, $t=t_0$ değeri için $\alpha(t_0)$ noktasının başlangıç noktasına en yakın nokta olmasının anlamı bu iki nokta arasındaki uzaklığın en kısa olması demektir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ eğrisi için
$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$

$\left.\|\vec{O\alpha(t)}\|\right|_{t=t_0}$ ifadesi iki nokta arasındaki uzaklığı ifade eder.

$$\left.\|\vec{O\alpha(t)}\|\right|_{t=t_0} = \left.\sqrt{(\alpha_1(t)-0)^2 + (\alpha_2(t)-0)^2 + \ldots + (\alpha_n(t)-0)^2}\right|_{t=t_0}$$ şeklindedir.

n-boyutlu Öklid uzayında norm fonksiyonu pozitif reel değerli olduğu için

$$\Rightarrow \left.\sqrt{\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \ldots + \alpha_n^2(t)}\right|_{t=t_0} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\left.2\alpha_1(t)\right|_{t=t_0} \left.\frac{d\alpha_1(t)}{dt}\right|_{t=t_0} + \ldots + \left.2\alpha_n(t)\right|_{t=t_0} \left.\frac{d\alpha_n(t)}{dt}\right|_{t=t_0}}{\left.2\sqrt{\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \ldots + \alpha_n^2(t)}\right|_{t=t_0}} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\alpha_1(t)\alpha_1'(t)\right|_{t=t_0} + \ldots + \left.\alpha_n(t)\alpha_n'(t)\right|_{t=t_0} = 0$$

$\Rightarrow \left.\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle\right|_{t=t_0} = 0$ bulunur. Bunun anlamı $t=t_0$ olduğunda $\alpha(t_0)$ konum vektörü ile $\alpha'(t_0)$ vektörü birbirlerine diktir.

2- $\alpha(t) = (3\sin t, 3\cos t, 4t)$ eğrisi için

$\alpha'(t) = (3\cos t, -3\sin t, 4) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t + 16} = 5 \neq 1$ olup

α yay parametreli değildir.

Frenet Elemanları

$$T(t) = \frac{\alpha(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \times T(t), \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

$\alpha''(t) = (-3\sin t, -3\cos t, 0)$

$\alpha'''(t) = (-3\cos t, 3\sin t, 0)$ dır.

- $\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3\cos t & -3\sin t & 4 \\ -3\sin t & -3\cos t & 0 \end{vmatrix} = (12\cos t, -12\sin t, -9)$,

- $\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \sqrt{144\cos^2 t + 144\sin^2 t + 81} = 15$,

- $\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = \begin{vmatrix} 3\cos t & -3\sin t & 4 \\ -3\sin t & -3\cos t & 0 \\ -3\cos t & 3\sin t & 0 \end{vmatrix} = -36$ eşitliklerinden

$T(t) = \left(\frac{3}{5}\cos t, -\frac{3}{5}\sin t, \frac{4}{5}\right)$

$B(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, -\frac{4}{5}\sin t, -\frac{3}{5}\right)$

$N(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{3}{5}\cos t & -\frac{3}{5}\sin t & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5}\cos t & -\frac{4}{5}\sin t & -\frac{3}{5} \end{vmatrix} = (\sin t, \cos t, 0)$

$\kappa(t) = \frac{15}{5^3} = \frac{3}{25}$, $\tau(t) = \frac{-36}{15^2} = \frac{-6}{25}$

3- $\alpha(t) = (f(t), g(t), 0)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki

Oskülatör Düzlem Denklemi : $\langle \overrightarrow{\alpha(t)X}, B(t) \rangle = 0$

Normal Düzlem Denklemi : $\langle \overrightarrow{\alpha(t)X}, T(t) \rangle = 0$

Rektifiyen Düzlem Denklemi : $\langle \overrightarrow{\alpha(t)X}, N(t) \rangle = 0$

$\alpha'(t) = (f'(t), g'(t), 0) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} \neq 1, \ \forall t \in I$

olup α yay parametreli değildir.

$\alpha''(t) = (f''(t), g''(t), 0)$ olmak üzere

$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f'(t) & g'(t) & 0 \\ f''(t) & g''(t) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t))$

$$\Rightarrow \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)$$ dır. Buradan Frenet vektörleri

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}} \left(f'(t), g'(t), 0\right)$$

$$B(t) = (0,0,1)$$

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}} \left(-g'(t), f'(t), 0\right)$$ bulunur. O zaman $X=(x,y,z)$ temsilci nokta için

$$\overrightarrow{\alpha(t)X} = X - \alpha(t) = \left(x-f(t),\ y-g(t),\ z\right)$$ olmak üzere

- $\langle \overrightarrow{\alpha(t)X}, \vec{B}(t) \rangle = \langle (x-f(t), y-g(t), z), (0,0,1) \rangle = 0$

$$\boxed{\Rightarrow \quad z=0 \rightarrow \text{Oskulatör D.}}$$

- $\langle \overrightarrow{\alpha(t)X}, \vec{T}(t) \rangle = \langle (x-f(t), y-g(t), z), \frac{1}{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}(f'(t), g'(t), 0) \rangle = 0$

$$\boxed{\Rightarrow \quad f'(t)x + g'(t)y - \left(f(t)f'(t) + g(t)g'(t)\right) = 0 \rightarrow \text{Normal D.}}$$

- $\langle \overrightarrow{\alpha(t)X}, \vec{N}(t) \rangle = \langle (x-f(t), y-g(t), z), \frac{1}{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}(-g'(t), f'(t), 0) \rangle = 0$

$$\boxed{\Rightarrow \quad -g'(t)x + f'(t)y + g'(t)f(t) - f'(t)g(t) = 0 \rightarrow \text{Rektifiyan D.}}$$

4- $\alpha(t) = (3t^2, 3t, 2t^3)$ eğrisinin her $t \in I$'ya karşılık gelen teğet doğruları

$\alpha'(t) = (6t, 3, 6t^2)$ olmak üzere $X = X(t)$ temsilci nokta için

$$d_1 \ldots \quad \frac{x(t)-3t^2}{6t} = \frac{y(t)-3t}{3} = \frac{z(t)-2t^3}{6t^2} = \lambda, \quad \vec{u}_1 = (6t, 3, 6t^2) \text{ dır.}$$

Ayrıca, $x=0$, $y=z$ doğrusu

$$d_2 \ldots \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = k$$ şeklinde ifade edilip $\vec{u}_2 = (0,1,1)$ dır.

d_1 ve d_2 doğruları arasındaki açıya θ dersek; doğrultmanları arasındaki açı da θ olacağından:

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \|\vec{u}_1\| . \|\vec{u}_2\| . \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1\| . \|\vec{u}_2\|} = \frac{\langle (6t, 3, 6t^2), (0,1,1) \rangle}{\sqrt{2} . \sqrt{36t^2+9+36t^4}} = \frac{3+6t^2}{\sqrt{2}\sqrt{(3+6t^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ + 2\pi k$$

$$\boxed{\Rightarrow \theta = \text{SABİT}}$$

5- Bir α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet doğru denkleminin $X = (x, y, z)$ temsilci nokta olmak üzere

$$X(t) = \alpha(t) + \lambda \alpha'(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

veya kartezyen denkleminde

$$\frac{X(t) - \alpha_1(t)}{\alpha_1'(t)} = \frac{y(t) - \alpha_2(t)}{\alpha_2'(t)} = \frac{z(t) - \alpha_3(t)}{\alpha_3'(t)} = \lambda$$ dır.

$$\alpha(t) = (\underbrace{e^t}_{\alpha_1}, \underbrace{\sin t}_{\alpha_2}, \underbrace{\ln(1-t)}_{\alpha_3}), \quad t=0 \text{ için} \quad \alpha_1(0) = 1,\ \alpha_2(0) = 0,\ \alpha_3(0) = 0$$

$$\alpha'(t) = (\underbrace{e^t}_{\alpha_1'}, \underbrace{\cos t}_{\alpha_2'}, \underbrace{\frac{-1}{1-t}}_{\alpha_3'}), \quad t=0 \text{ için} \quad \alpha_1'(0) = 1,\ \alpha_2'(0) = 1,\ \alpha_3'(0) = -1$$ bulunur. Buradan

$$\boxed{d \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} = \lambda}$$

6- α eğrisinin parametre aralığı I ve parametresi t
β eğrisinin parametre aralığı J ve parametresi s olsun.
parametre değişim fonksiyonu olmak üzere

$$h: J \to I$$
$$s \to h(s) = t$$

$$s = \int_0^t \|\vec{\alpha'(u)}\| du = \int_0^t \sqrt{\sinh^2 u + \cosh^2 u + 1}\, du = \sqrt{2}\int_0^t \cosh u\, du = \sqrt{2}\sinh t$$

$$\alpha'(u) = (\sinh u, \cosh u, 1) \qquad \Rightarrow t = \operatorname{arcsinh}\frac{s}{\sqrt{2}} = h(s)$$

α eğrisinin yeniden bir parametrizasyonu olacak olan β eğrisi:

$$\beta(s) = \alpha(h(s))$$

$$\Rightarrow \beta(s) = \alpha\left(\operatorname{arcsinh}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta(s) = \left(\cosh\left(\operatorname{arcsinh}\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sinh\left(\operatorname{arcsinh}\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{arcsinh}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)}$$

7- $\alpha(t) = (\underbrace{2\cos^2 t}_{x=x(t)}, \underbrace{\sin 2t}_{y=y(t)}, \underbrace{2\sin t}_{z=z(t)})$

- $x = 2\cos^2 t \Rightarrow (x-1)^2 = 2\cos^2 t - 1 = \cos^2 2t$
  $y = \sin 2t \Rightarrow y^2 = \sin^2 2t$
  $+$

$$\boxed{F_1 \ldots (x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow 1 \text{ yarıçaplı silindir.}}$$

$x = 2\cos^2 t \Rightarrow x^2 = 4\cos^4 t$
$y = \sin 2t \Rightarrow y^2 = \sin^2 2t$
$z = 2\sin t \Rightarrow z^2 = 4\sin^2 t$
$+$

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 4\cos^4 t + 4\sin^2 t\cos^2 t + 4\sin^2 t \\ &= 4\cos^2 t\,\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} + 4\sin^2 t \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{F_2 \ldots x^2+y^2+z^2 = 4 \rightarrow r=2 \text{ yarıçaplı küre}}$$

8- α birim hızlı eğri olduğundan $\forall s \in I$ için

$T(s) = \alpha'(s)$ yazılır. Buradan

$\Rightarrow T'(s) = \alpha''(s)$ dır. Serret-Frenet formüllerinden

$$\Rightarrow \kappa(s) N(s) = \alpha''(s)$$

$$\Rightarrow |\kappa(s)|\,\underbrace{\|N(s)\|}_{=1} = \|\alpha''(s)\|$$

$$\boxed{\Rightarrow \kappa(s) = \|\alpha'(s)\|}$$